Problema. *Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Si h es la altura de la hipotenusa, probar que*

$$\sqrt{8bc} \leqslant a + 2h \leqslant \sqrt{2}(b+c).$$

Estudiemos con *Mathematica* en qué casos se cumple la primera igualdad, donde estará incluido el caso de que ABC es rectángulo en A, y que la segunda desigualdad se cumple para cualquier triángulo ABC.

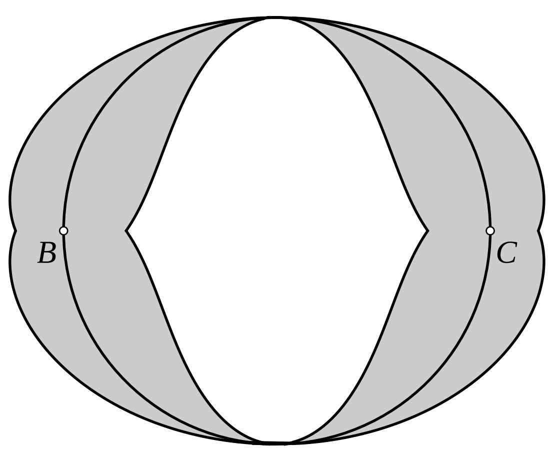
En primer lugar, consideramos la igualdad

$$\sqrt{8bc} = a + 2h. \tag{1}$$

Para visualizar los triángulos que cumplen esta igualdad consideramos el vértice B fijo en $(-1,0)$, el vértice C fijo en $(1,0)$, y $A = (x,y)$ variable. Para expresar la igualdad en términos de a, b, c tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} h =& \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a} \\ =& \frac{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}}{2a}, \end{aligned}$$

y también las relaciones $a = 2$, $b = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ y $c = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Sustituyendo el valor de h en la expresión $a + 2h - \sqrt{8bc}$ y luego sustituyendo a, b, c en función de x, y obtenemos una función continua $f(x,y)$ que se anulará cuando se cumpla (1).



La región sombreada está formada por los puntos A para los que se cumple la desigualdad propuesta. Vemos que esta región incluye a la circunferencia con diámetro BC, correspondiente a que ABC sea rectángulo en A.

Ahora comprobaremos que la desigualdad $a + 2h \leqslant \sqrt{2}(b + c)$ se cumple para cualquier triángulo ABC.

En efecto teniendo en cuenta la fórmula de h obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}(b+c) - (a+2h) \\
=&\sqrt{2}(b+c) - a - \frac{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}}{a}.
\end{aligned}$$

Para que esta expresión sea siempre positiva, lo debe ser la expresión

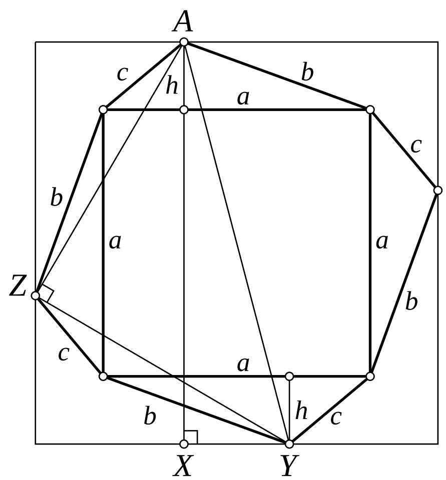
$$\begin{aligned}
&\left(a\left((b+c)\sqrt{2}-a\right)\right)^2 - (b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c) \\
=&(a^4 - 2\sqrt{2}ba^3 - 2\sqrt{2}ca^3 + 2b^2a^2 + 2c^2a^2 + 4bca^2) \\
&- (-a^4 + 2b^2a^2 + 2c^2a^2 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2) \\
=&2a^4 - 2\sqrt{2}ba^3 - 2\sqrt{2}ca^3 + 4bca^2 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 \\
=&\left(b^2 - c^2\right)^2 + 2a^2\left(a^2 - \sqrt{2}(b+c)a + 2bc\right) \\
\geqslant&(b^2 - c^2)^2 + 2a^2 \cdot \left(-\frac{(b-c)^2}{2}\right) \\
=&(b-c)^2((b+c)^2 - a^2) \\
\geqslant&0.
\end{aligned}$$

(Hemos usado que $-\frac{1}{2}(b-c)^2$ es el valor mínimo de la función cuadrática $a^2 - \sqrt{2}a(b+c) + 2bc$.)

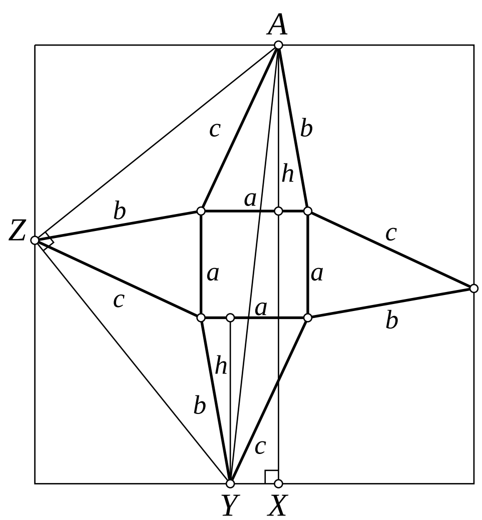
Demostraciones sin palabras

Juan Bosco Romero Márquez ofrece estas demostraciones sin palabras de la desigualdad $a + 2h < \sqrt{2}(b + c)$. En ambos casos tenemos

$$a + 2h = AX < AY = \sqrt{2} \cdot YZ < \sqrt{2} \cdot (b + c).$$



Caso 1. $A > 90°$.



Caso 2. $B > 60°$, $C > 60°$.