

**Problema.** Si  $p$ ,  $r$  y  $R$ , son el semiperímetro, radio del círculo inscrito y radio del círculo circunscrito al triángulo  $ABC$ , demostrar que se cumplen las siguientes desigualdades, y que las igualdades correspondientes se cumplen si y solo si el triángulo es equilátero.

$$1. \quad \frac{p^2}{3r} \geq 4R + r$$

$$2. \quad 2p^2 \geq 27Rr$$

Propuesto por Juan-Bosco Romero Márquez.

*Solución de Francisco Javier García Capitán*

1. Teniendo en cuenta las fórmulas del área

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}$$

obtenemos que

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}, \quad 4rR = \frac{abc}{p}$$

y entonces

$$\begin{aligned} p^2 - 12Rr - 3r^2 &= p^2 - \frac{3abc}{p} - \frac{3(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \\ &= p^2 - \frac{3}{p} (abc + (p-a)(p-b)(p-c)) = \\ &= p^2 - \frac{3}{p} (p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p) = \\ &= p^2 - 3(p^2 - 2p^2 + (ab+bc+ca)) = \\ &= 4p^2 - 3(ab+bc+ca) = \\ &= (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \\ &= \frac{1}{2} ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0, \end{aligned}$$

cumpléndose la igualdad si y solo si  $a = b = c$ .

2. Teniendo en cuenta que  $2p^2 - 27Rr$  puede expresarse como

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - 21abc}{2(a + b + c)},$$

y que, con la notación de Muirhead, el numerador puede expresarse como

$$\frac{1}{2} [3, 0, 0] + 3 [2, 1, 0] - \frac{21}{6} [1, 1, 1],$$

la igualdad propuesta se expresa

$$[3, 0, 0] + 6 [2, 1, 0] \geq 7 [1, 1, 1],$$

que es evidente por el teorema de Muirhead ya que  $[3, 0, 0] \geq [1, 1, 1]$  y  $[2, 1, 0] \geq [1, 1, 1]$ .

Para una rapidísima lección sobre el teorema de Muirhead, leer

<http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol296garcap/sol296garcap.htm>