Problema 77

Sean los paralelogramos $OABC$ y $OPQR$ como se indican en la figura y definimos el punto M como la intersección de los segmentos PA y QB.

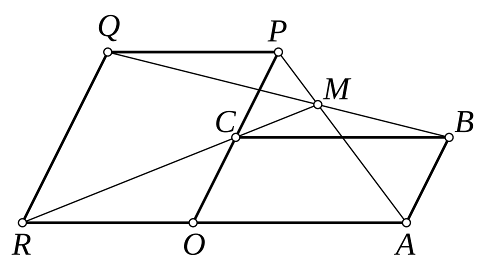
a) Probar que los puntos R, C y M están alineados.

b) Probar que el triángulo RMA es rectángulo en M si y solo si los paralelogramos de partida son cuadrados.

c) Determinar el lugar geométrico de los puntos M para el caso en el que $OABC$ es un cuadrado fijo y $OPQR$ es un cuadrado variable.

Solución de Francisco Javier García Capitán

a) Llamamos, como en la figura, $a = OA$, $b = RO$, $c = AB$, $d = RQ$.



Prolongamos QB hasta cortar en D a OA. Usando los triángulos semejantes BAD y QRD, tenemos

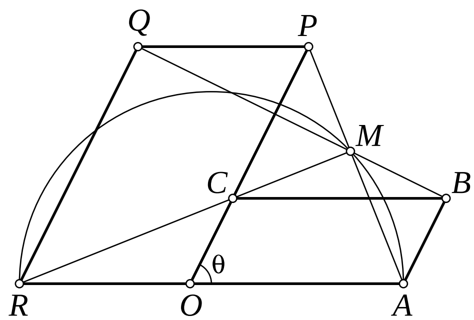
$$\frac{AD}{c} = \frac{a+b+AD}{d} \Rightarrow AD = \frac{c(a+b)}{d-c}.$$

Ahora, aplicando el teorema de Menelao al triángulo POA,

$$\frac{OR}{RA} = \frac{-b}{a+b}, \quad \frac{AM}{MP} = \frac{AD}{QP} = \frac{(a+b)c}{b(d-c)}, \quad \frac{PC}{CO} = \frac{d-c}{c},$$

de donde $\dfrac{OR}{RA} \cdot \dfrac{AM}{MP} \cdot \dfrac{PC}{CO} = -1$ y entonces R, C y M están alineados.

b) El enunciado es incorrecto, ya que si partimos de un paralelogramo $OABC$ y un punto R sobre la recta OA, como en la figura siguiente, podemos construir el triángulo RMA rectángulo en M sin que $OABC$ sea un cuadrado.



En efecto, trazamos la circunferencia de diámetro RA, y la recta RC, que se cortan en M. Ahora trazamos las rectas OC y AM, que se cortan en P, y trazamos la recta BM, que corta en Q a la paralela por P a OA. Por ser M independiente de Q, es claro que QR debe ser paralelo a OP, en caso contrario tendríamos otro paralelogramo $ROPQ'$ con Q' intersección de la paralela por P a OA con la recta BM, y por tanto $Q' = Q$.

c) Si consideramos fijo el paralelogramo $OABC$ y variamos el punto R sobre la recta OA, por ser recto el ángulo AMC, el punto M siempre estará en la circunferencia de diámetro AC.

Usando coordenadas podemos obtener que, si OA y OC forman un ángulo θ,

$$\begin{aligned}
&O = (0,0), A = (a,0)\,, R = (-b,0), C = (u,v), B = (a+u,v),\\
&M = \left(\frac{a(b+u)^2 - bv^2}{(b+u)^2+v^2}, \frac{(a+u)(b+u)v}{(b+u)^2+v^2}\right),\\
&P = \left(\frac{au(b+u)}{bu+u^2+v^2}, \frac{a(b+u)v}{bu+u^2+v^2}\right).
\end{aligned}$$

A partir de aquí,

$$d = OP = \frac{a(b+u)c}{bu+c^2} = \frac{a(b+c\cos\theta)c}{bc\cos\theta + c^2} = \frac{a(b+c\cos\theta)}{b\cos\theta + c},$$

es decir

$$\cos\theta = \frac{ab-cd}{bd-ac}.$$

En el caso de que los paralelogramos sean rectángulos tenemos $\cos\theta = 0$ y $ab = cd$, es decir los rectángulos son proporcionales.

En resumen, con todo lo anterior, hemos respondido a esta variación del enunciado:

Problema 77a

Sean los paralelogramos $OABC$ y $OPQR$ como se indican en la figura y definimos el punto M como la intersección de los segmentos PA y QB.

a) Probar que los puntos R, C y M están alineados.

b) Dado el paralelogramo $OABC$ y el punto R sobre la recta OA, hallar el paralelogramo $OPQR$ de manera que en la construcción anterior sea RMA rectángulo en M.

c) Hallar el lugar geométrico de M en el apartado anterior al variar R sobre la recta OA.