Problema. Sea ABC un triángulo, de lados $a \geq b \geq c$. Denotamos por m, n, las proyecciones ortogonales de b y c sobre a, respectivamente. Sean h_b, h_c, las alturas correspondientes a los lados b y c, respectivamente. Caracterizar con si y sólo si a los triángulos que verifican la siguiente propiedad: $m(h_b - c) = n(h_c - b)$. Interpretar geométricamente esta relación.

Solución de Francisco Javier García Capitán. En primer lugar, si el triángulo es rectángulo, entonces sabemos que es $m = b^2/a$, $n = c^2/a$, $h_b = c$, $h_c = b$, por lo que tendremos

$$m(h_b - c) = m(c - c) = 0 = n(b - b) = n(h_c - b).$$

Para otros triángulos tenemos que

$$\begin{aligned} m &= b\cos C = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}. \\ n &= c\cos B = c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}, \end{aligned}$$

Por otro lado, llamando S al área del triángulo ABC,

$$\frac{h_c - b}{h_b - c} = \frac{\frac{2S}{c} - b}{\frac{2S}{b} - c} = \frac{\frac{2S-bc}{c}}{\frac{2S-bc}{b}} = \frac{b}{c}.$$

Para obtener esta igualdad hemos supuesto que $2S - bc$ no es cero, y esto ocurre solo si el triángulo es rectángulo.

$$\begin{aligned} & m(h_b - c) = n(h_c - b) \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{h_c - b}{h_b - c} \Leftrightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{b}{c} \\ \Leftrightarrow & c(a^2 + c^2 - b^2) = b(a^2 + b^2 - c^2) \\ \Leftrightarrow & (b - c)a^2 + (b + c)(b^2 - c^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (b - c)(a^2 + (b - c)^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & b = c. \end{aligned}$$

Por tanto, la propiedad también se cumple para los isósceles con $AB = AC$.