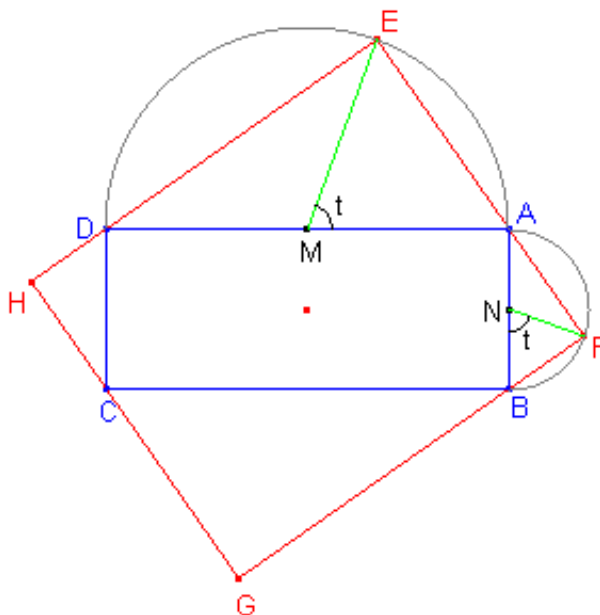


## Problema 9001 de 20000 Problems under the Sea.

¿Qué rectángulos pueden inscribirse en rectángulos más grandes?

Supongamos que el rectángulo  $ABCD$  está inscrito en el rectángulo  $EFGH$  como en la figura. Entonces, el punto  $E$  estará en la circunferencia de diámetro  $AD$  y el punto  $F$  estará en la circunferencia de diámetro  $AB$ . Sean  $M, N$  los puntos medios de  $AD$  y  $AB$ , respectivamente. Si  $t$  es el ángulo que forma  $ME$  con  $MA$ , el mismo formará  $NF$  con  $NB$ .



Asignamos coordenadas de manera que el origen es el centro del rectángulo  $ABCD$  y  $AD=2a$  y  $AB=2b$  son paralelos a los ejes. Representamos por  $c$  y  $s$  el coseno y el seno de  $t$ .

```
ptA := a + b I; ptC := -ptA; ptB := a - b I; ptD := -ptB;
ptE := b I + a (c + I s); ptF := a + b (s - I c);
ptH := -ptF;
```

Para que  $EFGH$  sea semejante a  $ABCD$ , al girar  $90^\circ$  el vector  $\mathbf{EH}$  en dirección contraria a las agujas del reloj debemos obtener el vector  $(a/b)\mathbf{EF}$ , es decir, debe ser  $I \cdot \mathbf{EH} = (a/b) \mathbf{EF}$ , o de otra forma,  $b \cdot \mathbf{EH} \cdot I - a \cdot \mathbf{EF}$  debe anularse.

```
Simplify[b (ptH - ptE) I - a (ptF - ptE)]
(a^2 - b^2) (-1 + c + i s)
```

Puede ser  $a=b$  o  $t=0$ , pero el caso  $t=0$  es trivial, ya que conduce a que los dos rectángulos son iguales.

Otra posibilidad sería que  $I \cdot \mathbf{EH} = (b/a) \mathbf{EF}$ , o de otra forma,  $a \mathbf{EH} \cdot I - b \mathbf{EF}$  debe anularse.

```
Simplify[a (ptH - ptE) I - b (ptF - ptE)]
(a^2 - b^2) (-i - i c + s)
```

De nuevo, sólo puede ser  $a = b$ .